$S = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ を区分的に C^r 級の超曲面とし，$f, \boldsymbol{X}$ を S を含む $\mathbb{E}^{n+1}$ の領域上の C^0 スカラー場，C^0 ベクトル場とする．このとき，$\displaystyle\int_S f\,dA$，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{A}$ を各々，

$$\int_S f\,dA := \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} f\,dA, \qquad \int_S \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{A} := \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i} \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{A}$$

によって定義する．$\displaystyle\int_S f\,dA$，$\displaystyle\int_S \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{A}$ を各々，$f, \boldsymbol{X}$ の S に沿う**面積分**という．特に，$\displaystyle\int_S 1\,dA$ を S の**超曲面積**といい，$\mathcal{V}(S)$，または $\mathcal{A}(S)$ と表す．

問 1.10.1　F を，$\mathbb{R}^n$ の区分的に $C^{r'}$ 級の境界をもつ有界閉領域 E を含む領域 D 上で定義された C^r 級関数（$r \geq r'$）とし，$\boldsymbol{x} : D \to \mathbb{E}^{n+1}$ をそのグラフ曲面，つまり，

$$\boldsymbol{x}(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_n, F(u_1, \ldots, u_n)) \quad ((u_1, \ldots, u_n) \in D)$$

とする．$\mathbb{E}^{n+1}$ 内の区分的に $C^{r'}$ 級の境界をもつ C^r 超曲面片 $S := \boldsymbol{x}(E)$ を考える．このとき，S を含む $\mathbb{E}^{n+1}$ の領域上で定義された C^0 スカラー場 f と C^0 ベクトル場 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_{n+1})$ に対し，

$$\int_S f\,dA = \int\!\!\int_E f(\boldsymbol{x}(u_1, \ldots, u_n)) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)^2}\, du_1 \cdots du_n,$$

$$\int_S \boldsymbol{X} \cdot d\boldsymbol{A} = \int\!\!\int_E \left((-1)^{\overset{n-1}{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i(\boldsymbol{x}(u_1, \ldots, u_n)) \frac{\partial F}{\partial u_i} + {}^{(-1)^n} X_{n+1} \right) du_1 \cdots du_n$$

が成り立つことを示せ．

1.11　ベクトル解析におけるストークスの定理

この節において，**ストークスの定理**（**Stokes' theorem**）について述べることにする．ストークスの定理にはいろいろなタイプのものがあり，この節で述べるストークスの定理は通常，ベクトル解析の分野においてそうよばれるものである．

$\boxed{\textbf{定理 1.11.1}}$（**ストークスの定理**）　$S = \boldsymbol{x}(E)$ を $\mathbb{E}^3$ 内の区分的に $C^{r'}$ 級の境界をもつ C^r 超曲面片（$r \geq \max\{r', 2\}$，$r' \geq 1$）とし，$c : [0, 1] \to \mathbb{E}^3$ を境界 ∂S を与える区分的に $C^{r'}$ 級の単純閉曲線で，$\boldsymbol{x}^{-1} \circ c$ が反時計回りに進む